Prepa # 4 - Superposición, Thevenin, Norton, MTP & OPAMP

* Linealidad

Un circuito lineal es aquel cuya salida está linealmente relacionada a su entrada.

Se debe cumplir:

1. $V = iR \rightarrow \alpha V = \alpha i R$
2. $V = iR$; $i = i_1 + i_2 \rightarrow V = (i_1 + i_2)R$
   $\rightarrow V = i_1 R + i_2 R \rightarrow V = V_1 + V_2$

Ejemplo de propiedad lineal:

$P = iV$; $i = (i_1 + i_2) \rightarrow P = (i_1 + i_2)V$

$\rightarrow P = i_1 V + i_2 V \rightarrow P = P_1 + P_2$

Ejemplo de propiedad no lineal:

$P' = i^2 R$; $i = (i_1 + i_2) \rightarrow P' = (i_1 + i_2)^2 R$

¿Será que $P' = (i_1 + i_2)^2 R \stackrel{?}{=} P_1 + P_2$?

$P' = (i_1^2 + 2 i_1 i_2 + i_2^2)R = P_1 + 2 i_1 i_2 R + P_2 \neq P_1 + P_2$

Claramente, no. Así que $P = i^2 R$ no es lineal.

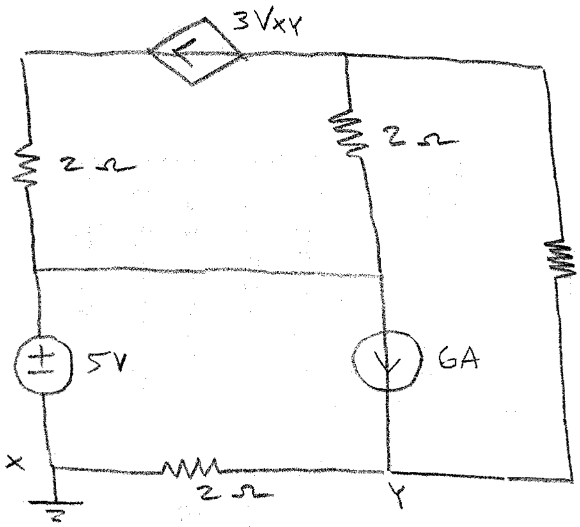
1. Superposición

El teorema dice que en un circuito lineal el voltaje o la corriente a traves de un elemento es igual a la suma algebraica de c/u de los aportes de las fuentes independientes.

Pasos:

1) Apagan todas las fuentes independientes menos una, si las fuentes son de voltaje reemplazan por un "corto" y si son de corriente por un "abierto". si hay fuentes dependientes estas no se apagan.
2) Hallan el valor de la variable deseada y repetir el paso 1 para cada fuente ind.
3) Suman algebraicamente los valores del paso 2, ese será nuestra respuesta.

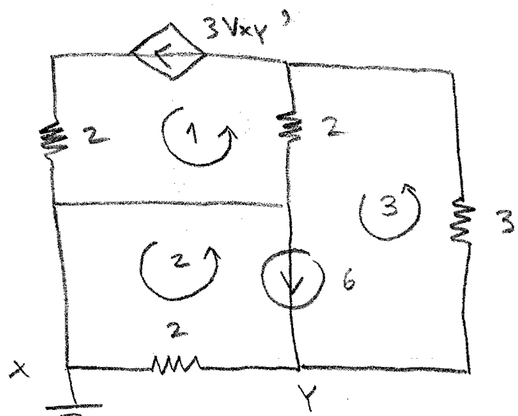
Ejercicio 1)



* Hallar V_{XY} usando superposición.

Tenemos 2 fuentes ind que podemos apagar y una dep que no. Así que hay 2 casos.

Caso I (5V off)



Mallas:

Supermalla 2-3:

$i_3 - i_2 = 6 \quad (1)$

$2i_2 + 3i_3 + 2i_3 - 2i_1 = 0 \quad (2)$

$2i_2 + 5i_3 - 2i_1 = 0$

malla 1:

$i_1 = 3V_{XY}' = 3 \cdot 2i_2$

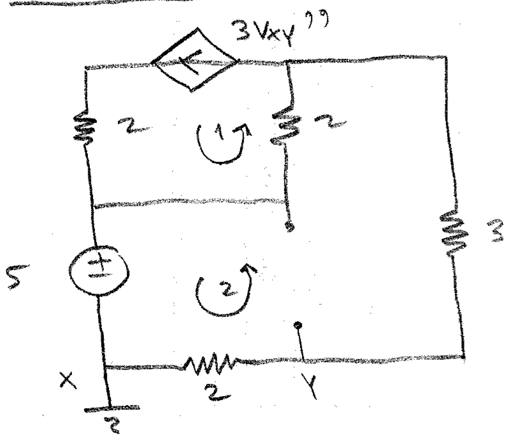
$i_1 = 6i_2 \quad (3)$

Pongo (3) en (2)

$i_3 = 2i_2 \Longrightarrow 2i_2 - i_2 = 6 \longrightarrow i_2 = 6A$

$\boxed{V_{XY}' = 2 \cdot 6 = 12V}$

Caso II (6A off)



Mallas:

malla 1:

$i_1 = 3V_{XY}'' = 6i_2$

malla 2:

$5 + 2i_2 + 3i_2 + 2i_2 - 2i_1 = 0$

$i_2 = 1A$

$\longrightarrow V_{XY}'' = 2i_2 = 2 \cdot 1$

$\boxed{V_{XY}'' = 2V}$

* Por superposición el valor real de V_{XY} será:

$V_{XY} = V_{XY}' + V_{XY}'' = 14V$ //

2. OPAMP

Es un elemento activo utilizado para efectuar operaciones matemáticas.

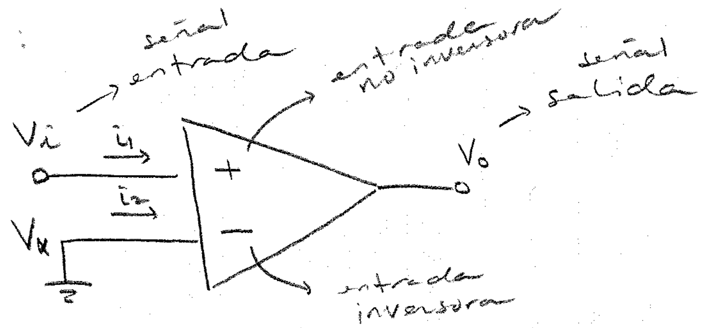
· <u>propiedades del OPAMP ideal</u>:

1) Como la resistencia interna es muy grande

$$\boxed{i_1 = i_2 = 0}$$

2) El voltaje en las entradas es igual

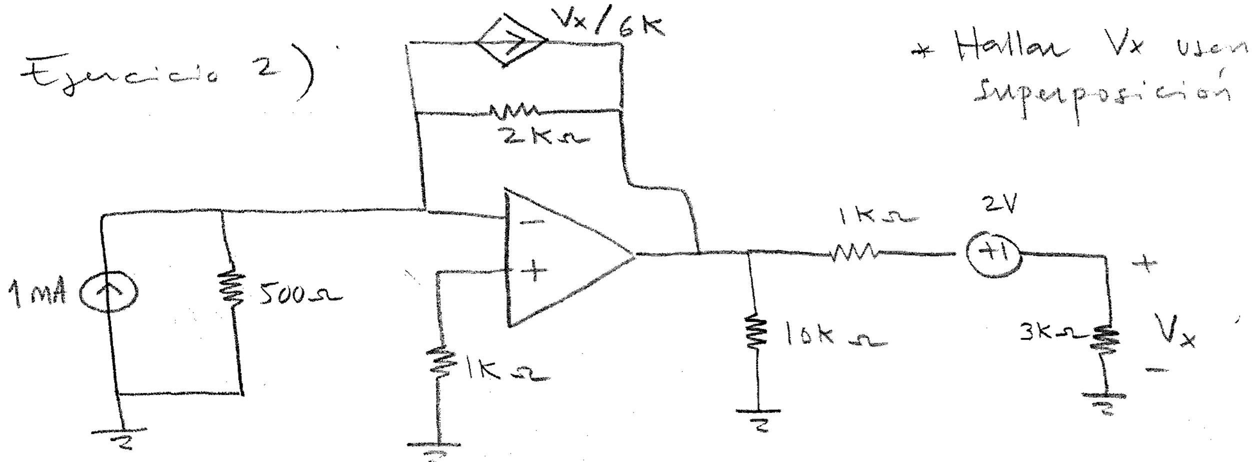
$$\boxed{V_i = V_\alpha}$$



Nota: Los opamp generalmente se hacen por nodos. Resolverlos es sencillo, se definen las ecuaciones nodales y se aplican las propiedades.

Ejercicio 2)

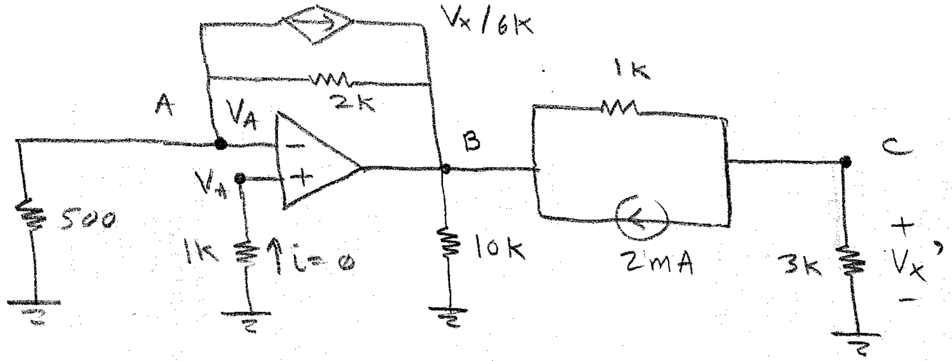
* Hallar Vx usando superposición.



Aquí hay 2 fuentes ind. así que tenemos que resolver 2 casos.

Caso I (1mA off)

* Trans. de fuente



Nodo A

$$\frac{V_A}{500} + \frac{V_A - V_B}{2K} + \frac{V_x}{6K} = 0 \quad ; \text{ pero } V_A = 0$$

$$-\frac{V_B}{2K} + \frac{V_x}{6K} = 0 \longrightarrow V_B = \frac{V_x}{3} = \frac{V_c}{3}$$

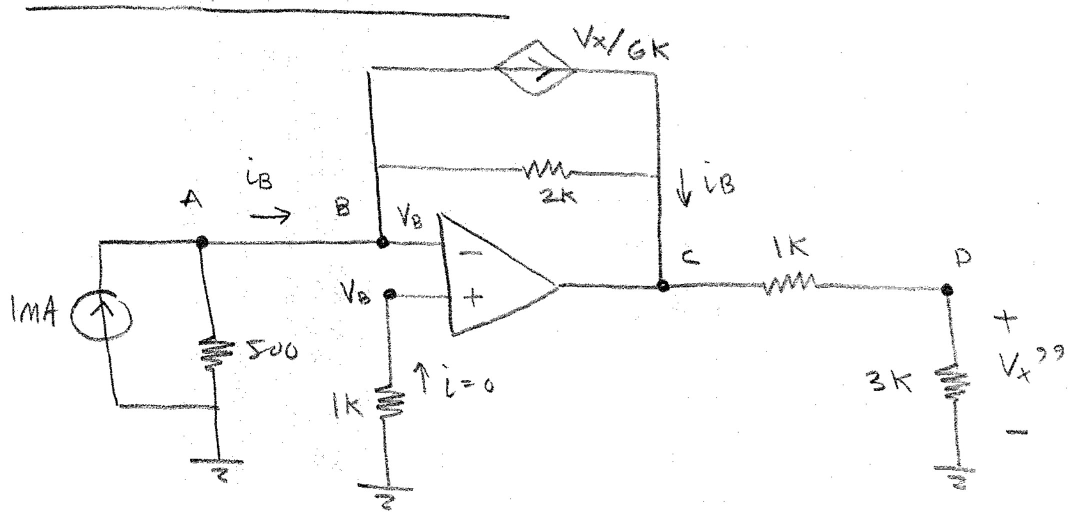
Nodo c

$$\frac{V_c - V_B}{1K} + 2m + \frac{V_c}{3K} = 0 \quad ; \text{ pero } V_B = \frac{V_c}{3}$$

$$\frac{V_c - \frac{V_c}{3}}{1K} + 2m + \frac{V_c}{3K} = 0 \longrightarrow \frac{V_c}{1K} + 2m = 0$$

$$\boxed{V_c = V_x' = -2V}$$

Caso II (2V off)



Nodo B

$$\frac{V_B - V_c}{2K} + \frac{V_x''}{6K} - i_B = 0 \quad ; \text{ pero } V_B = 0 \text{ y } V_x'' = V_D$$

$$-\frac{V_c}{2K} + \frac{V_D}{6K} - i_B = 0$$

Nodo D

$$\frac{V_D - V_c}{1K} + \frac{V_D}{3K} = 0 \longrightarrow \frac{V_D}{750} = \frac{V_c}{1K} \longrightarrow V_D = \frac{3V_c}{4}$$

Del nodo B:

$$-\frac{V_c}{2K} + \frac{V_c}{8K} - i_B = 0 \longrightarrow i_B = -\frac{3V_c}{8K}$$

Nodo A:

$$-1mA + \frac{V_A}{500} + i_B = 0 \quad ; \text{ pero } V_A = V_B = 0\,V$$

$$\longrightarrow i_B = 1mA$$

Del nodo B:

$$-\frac{3V_c}{8K} = 1m \longrightarrow V_c = -\frac{8}{3}V$$

Del nodo D:

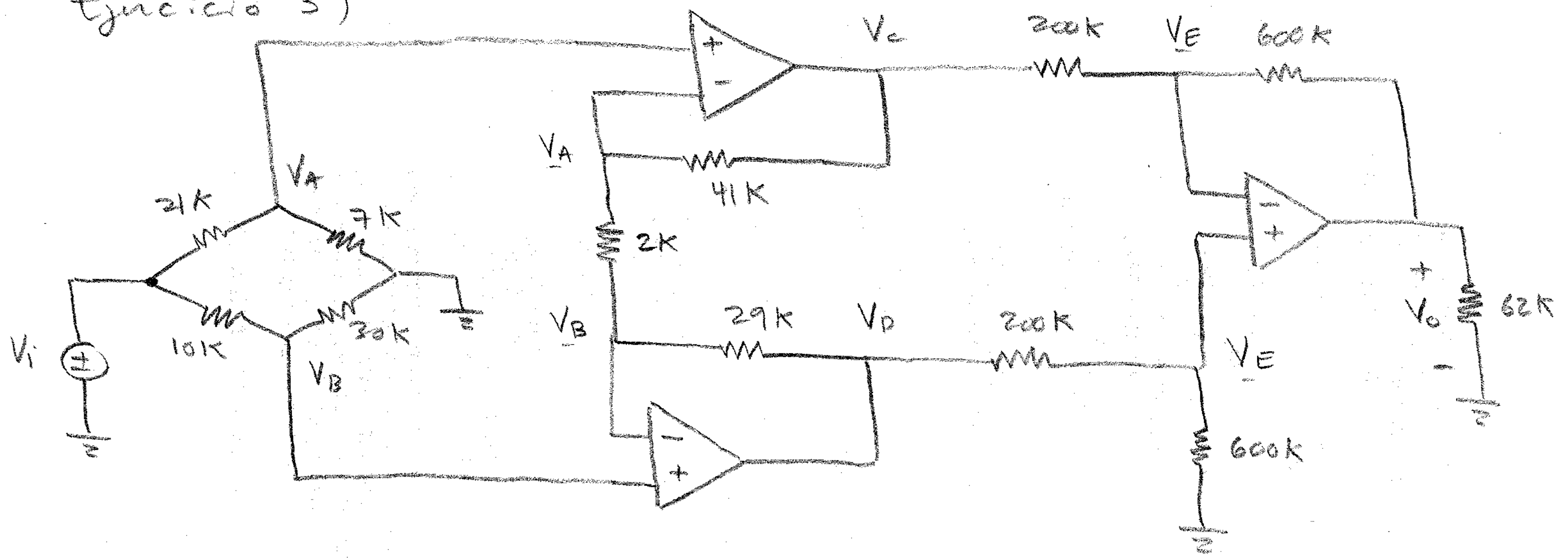
$$V_D = \frac{3}{4}V_c = \frac{3}{4}\cdot -\frac{8}{3} = -2V$$

$$\boxed{V_D = V_x'' = -2V}$$

Por superposición el valor real de V_x será

$$V_x = V_x' + V_x'' = -4V$$

Ejercicio 3)



* Hallar V_A, V_B, V_C, V_D y V_o en función de V_i.

Nodo A

$$\frac{V_A - V_i}{21K} + \frac{V_A - 0}{7K} = 0 \longrightarrow \boxed{V_A = \frac{V_i}{4}}$$

Nodo B

$$\frac{V_B - V_i}{10K} + \frac{V_B - 0}{30K} = 0 \longrightarrow \boxed{V_B = \frac{3V_i}{4}}$$

Note que:

$$\frac{V_D - V_B}{29K} = \frac{V_B - V_A}{2K} = \frac{V_A - V_C}{41K} = i_\alpha \longrightarrow i_\alpha = \frac{V_i}{4K}$$

Así que,

$$\frac{V_D - V_B}{29K} = \frac{V_i}{4K} \longrightarrow \boxed{V_D = 8V_i}$$

$$\frac{V_A - V_C}{41K} = \frac{V_i}{4K} \longrightarrow \boxed{V_C = -10V_i}$$

Nodo E

1) $$\frac{V_E - V_C}{200K} + \frac{V_E - V_o}{600K} = 0$$

2) $$\frac{V_E - V_D}{200K} + \frac{V_E - 0}{600K} = 0 \longrightarrow V_E = \frac{3}{4} V_D$$

Entonces,

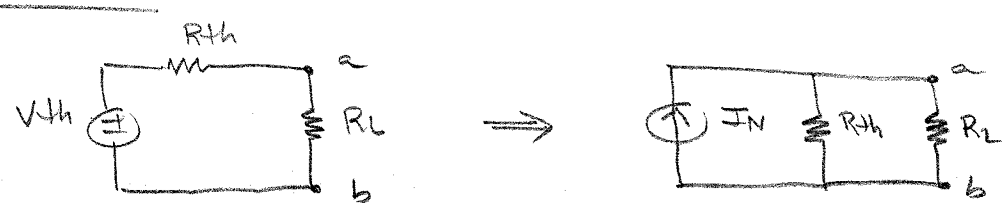
$$\boxed{V_o = 54 V_i}$$

3. Thevenin / Norton

El teorema dice que un circuito lineal puede ser reemplazado por:

* Una fuente de voltaje (V_{th}) en serie con una resistencia (R_{th}) } Teo. de Thevenin
* Una fuente de corriente (I_N) en paralelo con una resistencia (R_{th}) } Teo. de Norton

Thevenin

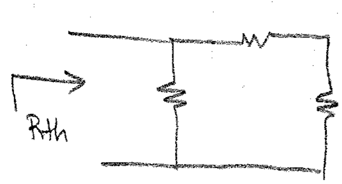


$$\boxed{V_{th} = I_N R_{th}}$$

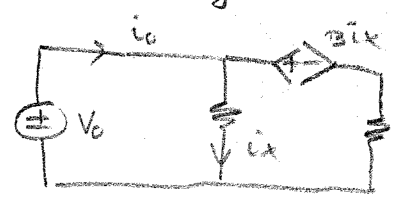
Para R_{th}:

1) Buscamos la resistencia equiv alrededor de R_L apagando todas las fuentes independientes.
2) Si hay fuentes dep. estas no se apagan y se donde estaba R_L se coloca una fuente de prueba (i_o ó V_o) con un valor arbitrario y se consigue el valor del otro parametro, i_o si la fuente es V_o y viceversa.

1



2

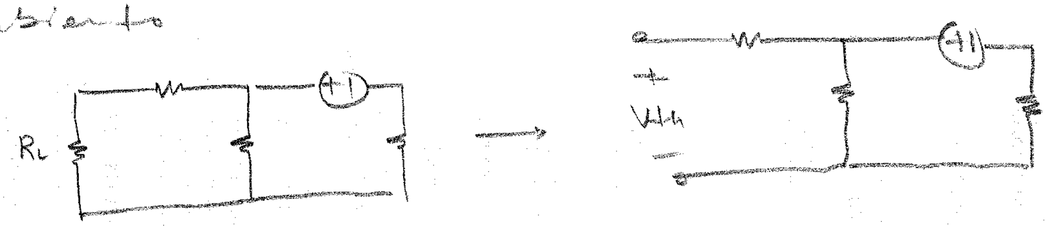


$$R_{th} = \frac{V_o}{i_o}$$

Para V_{th}

1) Se reemplaza R_L por un abierto y se busca el valor de la tensión en el abierto

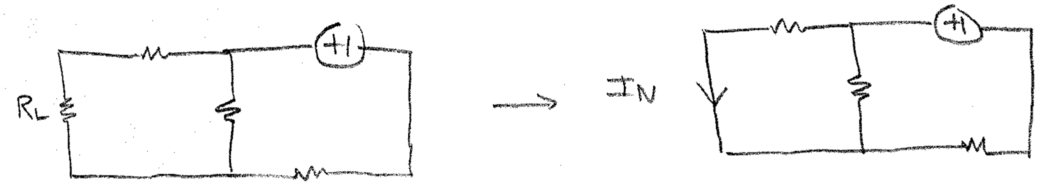
Ej.



Para I_N

1) Se reemplaza R_L por un corto y se busca el valor de la corriente a través de él (bajando).

Ej.



Nota: Otra forma para conseguir I_N es encontrar V_{th} y luego $I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$.

Nota 2: no se asuste si R_{th} es negativo (¿qué?!) eso lo que indica es que pueden haber fuentes dep. en el circuito y que el sist. como tal genera potencia.

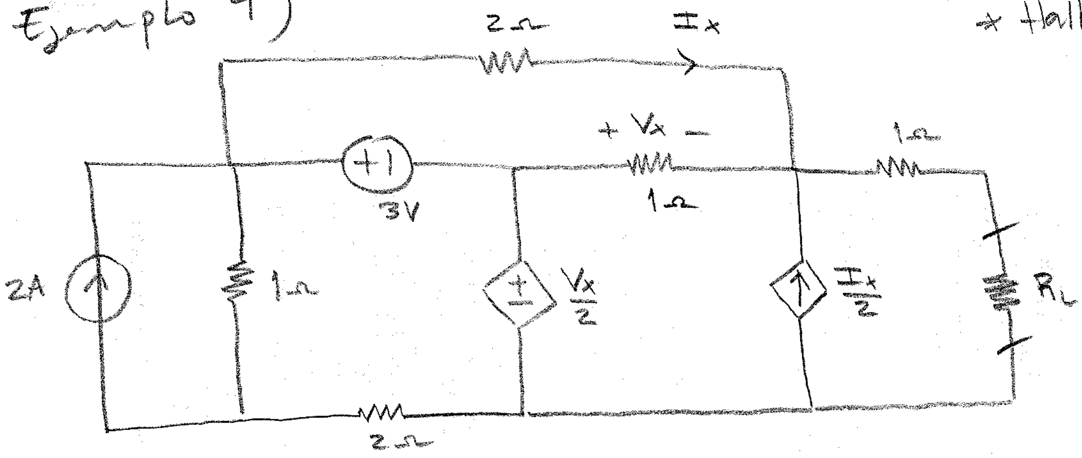
3.1. Máx. Transf. de Potencia

El teorema dice que para un circuito equiv. de Thevenin / Norton la transferencia de potencia a la carga R_L será máxima cuando $R_L = R_{th}$, por lo tanto:

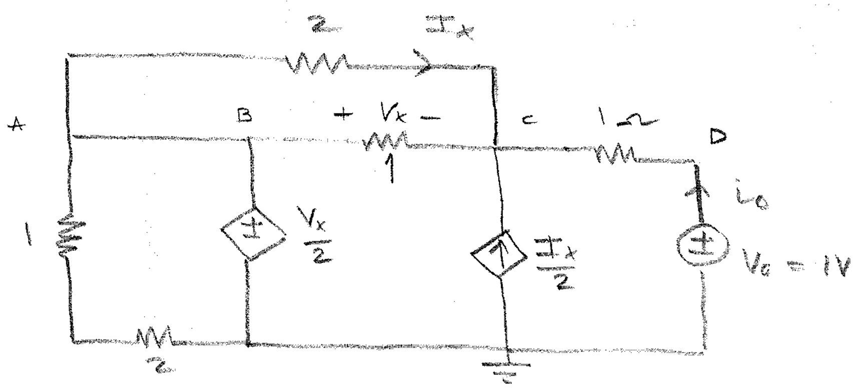
$$\boxed{P_{máx} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}}$$

Ejemplo 4)

* Halle R_L para MTP y $P_{máx}$.



Rth



Nodo c

$$\frac{V_C - V_D}{1} + \frac{V_C - V_A}{2} - \frac{I_x}{2} + \frac{V_C - V_B}{1} = 0 \quad ; \quad V_D = 1V, \; V_A = V_B$$

$$V_C - 1 + \frac{V_C - V_A}{2} - \frac{(V_A - V_C)}{4} + V_C - V_A = 0$$

$$V_C = -\frac{7}{11}V_A + \frac{4}{11}$$

Nodo B

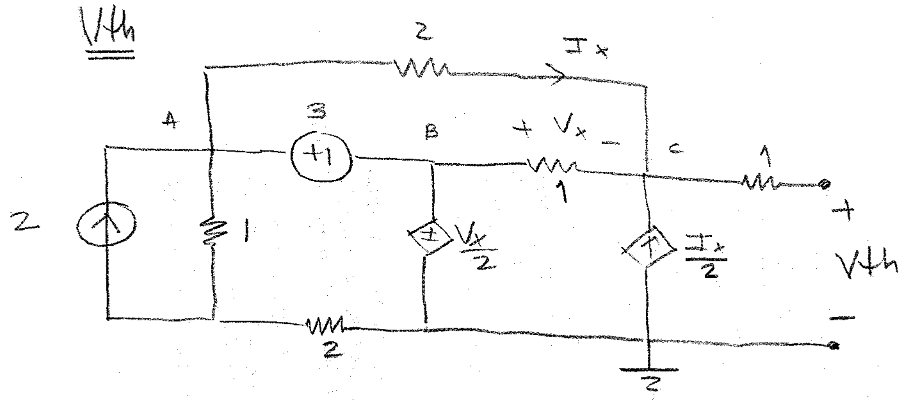
$$V_B = \frac{V_B - V_C}{2} \longrightarrow V_B = -V_C = V_A$$

Del nodo c :

$$V_C = \frac{2}{9}V \longrightarrow i_o = \frac{V_D - V_C}{1} = \frac{7}{9}A$$

$$\longrightarrow R_{th} = \frac{V_o}{i_o} = \frac{9}{7}\,\Omega$$

Vth



Nodo C

$$-\frac{I_x}{2} + \frac{V_c - V_A}{2} + \frac{V_c - V_B}{1} = 0 \quad ; \quad I_x = \frac{V_A - V_c}{2}$$

$$\frac{V_c - V_A}{4} + \frac{V_c - V_A}{2} + V_c - V_B = 0$$

$$7V_c - 3V_A - 4V_B = 0$$

Supernodo (A - B)

$$V_A - V_B = 3 \quad ; \quad V_B = \frac{V_B - V_c}{2} \rightarrow \boxed{V_B = -V_c}$$

Del nodo C:

$$7V_c - 3V_A + 4V_c = 0$$

$$\boxed{V_A = \frac{11}{3} V_c} \Rightarrow V_c + \frac{11}{3}V_c = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{V_c = \frac{9}{14} V}$$

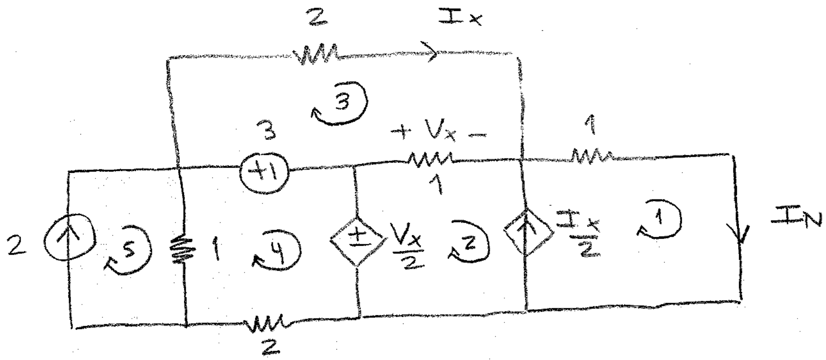
$$\boxed{V_{th} = V_c = \frac{9}{14} V}$$

MTP

$$P_{máx}(R_L = 9/7\,\Omega) = \frac{V_{th}^2}{4R_L} = \frac{(9/14)^2}{4(9/7)} = \frac{9}{112}\ W$$

Extra

I_N



Malla 3:

$$-3 + 2i_3 - V_x = 0 \quad ; \quad V_x = 1(i_2 - i_3) = i_2 - i_3$$

Supermalla 1-2:

* $i_1 - i_2 = \frac{I_x}{2} \rightarrow i_1 - i_2 = \frac{i_3}{2}$

$$\rightarrow \boxed{i_3 = 2i_1 - 2i_2}$$

* $-\frac{V_x}{2} + V_x + i_1 = 0$

$$\frac{V_x}{2} + i_1 = 0$$

$$\frac{(i_2 - i_3)}{2} + i_1 = 0$$

$$\frac{(i_2 - 2i_1 + 2i_2)}{2} + i_1 = 0 \rightarrow \boxed{i_2 = 0 \text{ A}}$$

* $i_3 = 2i_1 \quad ; \quad V_x = -i_3$
* $-3 + 2i_3 + i_3 = 0 \rightarrow \boxed{i_3 = 1 \text{ A}}$
* $\boxed{I_N = i_1 = 1/2 \text{ A}}$
* $\boxed{V_{th} = I_N \cdot R_{th} = 9/14 \text{ V}}$

$$P_{máx} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} = \frac{9}{112} \text{ W}$$